Út a rakétához

A következő feladatok megoldásával eljuthatunk a rakéták hajtását leíró fizikai és matematikai összefüggésekhez.

1. Egy gördeszkán állú fiú *u* sebességgel eldob egy *m* tömegű követ. Mekkora lesz a (gördeszkával együtt) *M* tömegű gyerek sebessége?

Megoldás

Ha a lendületmegmaradás törvényével írjuk le a jelenséget, akkor az alábbi egyenletből kell kiindulnunk: $\sum \vec{I}_{\text{előtt}} = \sum \vec{I}_{\text{után}}$

Az eldobás előtt a kőnek és a gyermeknek sincs lendülete (állnak), ezért az egyenlet bal oldala 0 (nullvektor). Az eldobás után a kőnek és a gyereknek is lesz lendülete. Így írhatjuk tovább a fenti egyenletet: $0 = m \cdot u + M \cdot v$

Ebből a gördeszkás gyerek sebessége: $v = -\frac{m \cdot u}{M}$

Fontos megjegyezni, hogy a lendület vektormennyiség, ezért a megmaradási törvénye csak az irány figyelembevételével érvényes. A levezetésben ez a végeredményül kapott tört előjelében mutatkozik meg. Ennek a fizikai jelentése az, hogy a gyerek a kővel ellentétes irányban mozdul el *v* sebességgel.

A feladatot Newton III. törvényének és a lendülettételnek az alkalmazásával is megoldhatjuk. Most abból kell kiindulnunk, hogy a kő eldobásakor keletkező erő és ellenerő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú. Egyik a kőre, másik a gyerekre hat: $F_{\text{gyerek}} = F_{\text{kő}}$

Itt az egyenlet két oldalán szereplő mennyiségek a Newton-törvény szerint eleve ellentétes irányúak, , az összefüggés csak a nagyságukra vonatkozik. Ezt kibonthatjuk a lendülettétel felhasználásával: $\frac{\Delta(M \cdot vv_{\text{gyerek}})}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot vv_{\text{kő}})}{\Delta t}$

Az eltelt idővel beszorozhatunk, és felhasználhatjuk, hogy a testek tömege az eldobás miatt nem változik: $M \cdot \Delta vv_{\text{gyerek}} = M \cdot \Delta vv_{\text{kő}}$

Mivel mindkét test álló helyzetből indul, ezért az (1) $M \cdot v = m \cdot u$ összefüggést kapjuk, amiből a keresett sebesség nagysága: (2) $v = \frac{m \cdot u}{M}$

Megjegyzések:

- Természetesen a $\vec{v}$ és az $\vec{u}$ vektorok ezúttal is ellentétes irányúak, ami a kiindulási feltételből, vagyis a hatás-ellenhatás elvéből adódik.
- A két megoldás első pillantásra eltérőnek látszik, de valójában mindkettőnek az erő fogalma és Newton törvényei adják az alapját.
- Az (1) egyenlet a rugalmas szétlökésekkor a tömeg és a sebesség között fennálló fordított arányosságnak felel meg.

2. Egy gördeszkás gyerek két azonos méretű, összesen *m* tömegű téglát dob el egymás után ugyanabba az irányba, önmagához képest *u* (relatív) sebességgel. Az álló helyzetből induló, a gördeszkával együtt *M* tömegű gyerek mekkora sebességre tehet így szert?

Megoldás

Jelöljük az egymás után eldobott téglák tömegét Δm-mel! Ekkor $\Delta m = \frac{m}{2}$

Az első tégla kidobásával elért sebességet a (2) összefüggés segítségével kapjuk:

(3) $v_1 = \frac{\Delta m \cdot u}{M + \Delta m}$

(A nevezőben a M+Δm tag azért jelenik meg, mert az első tégla eldobása után 1 tégla még a gördeszkán álló gyereknél van.)

A 2. tégla eldobására alkalmazzuk a lendületmegmaradás törvényét:

$(M + \Delta m) \cdot v_1 = Mv_2 + \Delta m \cdot (v_1 - u)$, amiből (3) beírásával adódik:

$$\Delta m \cdot \left(2u - \frac{\Delta m \cdot u}{M + \Delta m}\right) = Mv_2$$

Amiből a két tégla kidobásával elért sebesség: $v_2 = \frac{(2M + \Delta m) \cdot \Delta m}{(M + \Delta m) \cdot M} \cdot u = \boldsymbol{\frac{(4M + m) \cdot m}{(4M + 2m) \cdot M} \cdot u}$

Megjegyzés: Ha ehhez a megoldási eljáráshoz ragaszkodnánk, akkor 3-4 tégla kidobásánál már algebrailag rendkívül nehézkes lenne a probléma kezelése.

3. Egy kezdetben *m₀* össztömegű rakéta *n* darab adagban, *u* relatív sebességgel löki ki az *m* tömegű hajtóanyagot. Mekkora sebességre tehet így szert a rakéta?

Megoldás

Jelöljük az egymás után „kipöfögött” hajtóanyagadagok tömegét Δm-mel! Ekkor $\Delta m = \frac{m}{n}$

Ezúttal az egyes kilökődések után elért sebességértékek meghatározása helyett törekedjünk a kilökődések által létrehozott sebességváltozások kifejezésére!

Az első adag kilökésével elért sebességváltozást a (3) összefüggés alapján kapjuk:

(4) $\Delta v_1 = v_1 - 0 = \frac{\Delta m \cdot u}{m_0 - \Delta m}$

A második adag kilökését szemléljük a rakétával „együtt mozgó”, v_1 sebességű vonatkoztatási rendszerből Ez a „trükk” jelentősen megkönnyíti a rakéta mozgásának leírását. A 2. kilökéssel nyert sebességváltozás a (4) összefüggéshez hasonlóan adható meg:

$\Delta v_2 = \frac{\Delta m \cdot u}{m_0 - 2\Delta m}$ $\quad (= v_2 - v_1)$

Ha az *i*-edik kilökődéskor a v_{i-1} sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben írjuk fel a lendületmegmaradás törvényét, akkor az aktuális sebességváltozást a korábbiakhoz hasonlóan kapjuk:

(5) $\Delta v_i = \frac{\Delta m \cdot u}{m_0 - i \cdot \Delta m}$

A rakéta által elért sebesség a kapott sebességváltozások összegével egyenlő, azaz

(6) $v = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \cdots + \Delta v_n = \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m \cdot u}{m_0 - i \cdot \Delta m}}$

Megjegyzések:

- Az elért sebességet csak így, összegalakban tudjuk megadni.

- A kilökődésenként elért sebességváltozás folyamatosan nő: $\Delta v_1 < \Delta v_2 < \cdots < \Delta v_\mathrm{n}$

Ennek az az oka, hogy az (5) összefüggésben a nevező egyre kisebb lesz, amint a hajtóanyag folyamatos kipöfögésével a rakéta megmaradt $m_0 - \mathrm{i} \cdot \Delta m$ össztömege csökken.

4. Egy 750 kg össztömegű rakéta álló helyzetből indulva minden másodpercben1 kg hajtóanyagot bocsát ki 1000 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ relatív sebességgel. Mekkora lesz a rakéta sebessége, amikor az 500 kilogrammnyi üzemanyag elfogy?

Megoldás

A korábban bevezetett jelölésekkel: $\mathrm{m}_0 = 750\,\mathrm{kg}$ (össztömeg); $\mathrm{m} = 500\,\mathrm{kg}$ (a hajtóanyag tömege); $\mathrm{M} = 250\,\mathrm{kg}$ (a rakéta hajtóanyag nélküli tömege); $\mathrm{u} = 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (a hajtóanyag rakétához viszonyított sebessége); $\mathrm{n} = 500$ (az üzemanyagkilökések száma); $\Delta\mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = 1\,\mathrm{kg}$ (a hajtóanyagadagok tömege).

Az elért sebességet a (6) képlettel számíthatjuk ki 500 tag összeadásával:

$$v = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathbf{n}} \frac{\Delta m \cdot u}{m_0 - \mathrm{i} \cdot \Delta m} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathbf{500}} \frac{1000}{750 - \mathrm{i}}$$

Egyértelmű, hogy a végeredmény meghatározásához számítógépet kell használni. Programozhatunk, vagy alkalmazhatjuk az Excel-t az alábbi táblázat elkészítésével. - Érdemes az *i* változó helyett az időt bevezetni (másodpercenkénti felosztással).

	A	B	C	D	E
1	t (s)	Δv $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$	$v(t)$ $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$	u $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$	m_0 (kg)
2	0	0	0	1000	750
3	1	=D$2/(E$2-A3)	=C2+B3		elért seb.:
4	2	=D$2/(E$2-A4)	=C3+B4		=C502

Az itt szereplő képleteket az A, B és C oszlopokban az 502. sorig kell alkalmazni. A végeredményt a C502 cellában találjuk: 1099,9. Tehát a rakéta kb. **1100** $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-ra fog felgyorsulni.

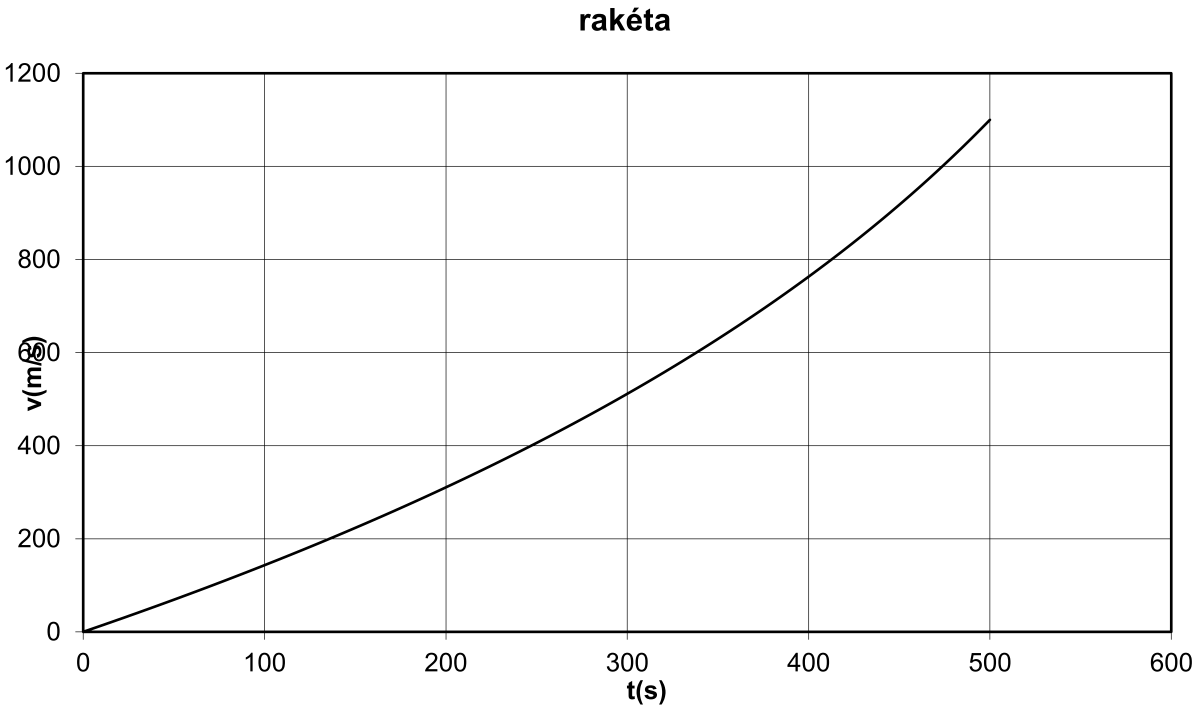
Megjegyzések:

- Kényelmi szempontból célszerű a C502 cellában megjelenő végeredményt a táblázat felső részén is megjeleníteni – pl. E4-ben.

- A fenti táblázatban a relatív sebességet (D2) és az össztömeg (E2) értékét szabadon változtathatjuk, s így a C502 cellában (illetve E4-ben) megjelenik az elért sebesség.

- Ha az n értékét szeretnénk megváltoztatni, akkor az A oszlopot a megfelelő értékig kell feltölteni. Ilyenkor a C502 szerepe értelemszerűen megváltozik.

- A rakéta sebességének időbeli változásáról akár diagramot is készíthetünk:



- Ezek alapján érdemes megoldani a K9MaL P3575. feladatát (forrás: https://www.komal.hu/verseny/2002-12/P.h.shtml)

5.Határozzuk meg, hogy mekkora sebességre tehet szert az m_0 össztömegű, hajtóanyag nélkül pedig M tömeggel rendelkező rakéta, ha a hajtóanyag folyamatosan, u relatív sebességgel távozik belőle!

Megoldás

Ezúttal is a (6) összefüggésből kell kiindulnunk, de most azzal a kiegészítéssel, hogy a hajtóanyagadagok száma minden határon túl nő, vagyis $n \to \infty$

$$v = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathbf{n}} \frac{\Delta m \cdot u}{m_0 - \mathrm{i} \cdot \Delta m}$$

Az $n \to \infty$ határátmenet azt is jelenti, hogy a kibocsátott hajtóanyagadagok tömege minden határon túl közelít 0-hoz, tehát $\Delta m \to 0$. A Δm érték egyúttal megfeleltethető a rakéta össztömege infinitezimális megváltozásának: $\mathrm{d}m$-nek. De ekkor ügyelnünk kell arra, hogy amíg $\Delta m > 0$, addig a rakéta össztömege folyamatosan csökken, vagyis $\mathrm{d}m < 0$. Ez alapján a következő megfeleltetést képezhetjük: $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta m \leftrightarrow -\,\mathrm{d}m$

A kiindulási kifejezés nevezőjében szereplő $m_0 - i \cdot \Delta m$ különbség a rakéta pillanatnyi tömegével egyenlő, amit jelöljünk most m-mel!

A leírtak alapján a sebességre vonatkozó fenti összeg határértéke egy határozott integrálnak felel meg:

$$v = \int_{m_0}^{M} -\frac{u}{m}\,\mathrm{d}m$$

Az összegzési változó $i = 1$ értékének az integrálás alsó határaként az m_0 kezdeti össztömeg; az $i = n$ értékének pedig a hajtóanyagától megvált rakéta M „üres” tömege felel meg. Mindezek alapján a rakéta által elért sebesség:

$$\boldsymbol{v} = [-u \cdot \ln m]_{m_0}^{M} = \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{ln}\frac{\boldsymbol{m_0}}{\boldsymbol{M}}$$

<u>Megjegyzések:</u>

- A fenti feladatok megoldásánál figyelmen kívül hagytuk a közegellenállást, illetve feltételeztük, hogy a rakéta kezdősebessége 0. Ha $v_0 \neq 0$, akkor a hajtóanyag kibocsátásával elért v sebességet gyorsítás esetén hozzá kell adni v_0-hoz (lassítás esetén pedig ki kell vonni v_0-ból).

- Az 5. feladat eredményét alkalmazhatjuk a 4. feladat adataira:

$$v = 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \ln\frac{750\ \mathrm{kg}}{250\ \mathrm{kg}} = 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \ln 3 = 1098{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Ez az eredmény elég nagy pontossággal megegyezik a 4. feladatban, közelítő módszerrel kapott sebességgel (1099,9 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$).

- Záró tapasztalatként elmondható, hogy a rakéta végsebessége csak a hajtóanyag relatív sebességétől és a rakéta össz- illetve üres tömegének hányadosától függ.

A rakéta lehet számunkra hasznos eszköz: kommunikációs, meteorológiai és navigációs műholdakat, csillagászati távcsöveket segíthet pályára; embereket juttathat a világűrbe. De pusztíthat, ölhet is. – egy valódi fizikus, mérnök csak olyan eszközöket fejleszt, amelyek az emberiség javát szolgálják.